

б) Градиент интер. функционала в задаче ОУ мин. 04/03

$$J(u) = \int_{t_0}^T (x(t; u) - b(t))^2 dt$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = 0, \quad t_0 \leq t \leq T$$

$$J(u) = \|Au - b\|^2, \quad Au(t) = x(t; u), \quad A: \underbrace{L_2(t_0, T)}_H \rightarrow \underbrace{L_2^n(t_0, T)}_F$$

$$A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$$

$$J'(u) = 2A^*(Au - b)$$

$$A^*c = B^T \psi(t; c)$$

$$\dot{\psi} = -A^T \psi - c(t), \quad \psi(T) = 0$$

$$\langle Au, c \rangle \stackrel{?}{=} \langle u, A^*c \rangle$$

$$\begin{aligned} \blacktriangle \langle Au, c \rangle_{L_2^n(t_0, T)} &= \int_{t_0}^T \langle x(t; u), c(t) \rangle dt = \int_{t_0}^T \langle x(t; u), -A^T \psi - \psi \rangle dt \\ &= \int_{t_0}^T \langle x(t), -A^T \psi \rangle dt - \underbrace{\langle x(t), \psi(t) \rangle \Big|_{t_0}^T}_{=0 \text{ (наз. усл.)}} + \int_{t_0}^T \underbrace{\langle \dot{x}(t), \psi(t) \rangle}_{=Ax + Bu} dt \\ &= \int_{t_0}^T \langle x(t), -A^T \psi \rangle dt \oplus \int_{t_0}^T \langle u, B^T \psi \rangle dt = \langle u, A^*c \rangle_{L_2^n(t_0, T)} \blacksquare \end{aligned}$$

Схема вычисл. $J'(u_0)$

1) $u_0(t) \rightarrow \dot{x} = Ax + Bu_0, \quad x(t_0) = 0 \rightarrow x(t; u_0)$

2) $Au_0(t) = x(t; u_0) \rightarrow Au_0(t) - b(t) = c$

3) С найденным c решим $\dot{\psi} = -A^T \psi - c, \quad \psi(T) = 0 \rightarrow \psi(t; Au_0(t) - b)$

4) $A^*c = \psi(t; Au_0(t) - b) \rightarrow J'(u_0) = 2B^T \psi(t; Au_0 - b)$

// 2 ЗК: вперед и назад //

! Зам If $\dot{x} = Ax + Bu + f, \quad x(t_0) = x_0$, то разбиваем на

2 задачи (см. ∇ Вейерштр.) $\|x = x_1 + x_2\|$

б) Градиент в 3DU нагретом стержне

$$J(u) = \int_0^l (y(T, x; u) - b(x))^2 dx$$

$\leftarrow$ длина стержня

// Задача: управлять управ-
ляемым $u(t)$ так, чтобы к мо-
менту времени T темпера-
тура стержня была близка к
заданной $(b(x))$ //

$$\begin{cases} y_t = y_{xx} \\ y_x|_{x=0} = 0, \quad y_x|_{x=l} + y|_{x=l} = u(t) \quad \leftarrow \text{источник} \\ y|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$\nwarrow$ нагревания

$$\mathcal{A}u(t) = y(T, x), \quad \mathcal{A}: \underbrace{L_2(0, T)}_H \rightarrow \underbrace{L_2(0, l)}_F$$

$$J(u) = \|\mathcal{A}u - b\|^2, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$$

$$J'(u) = 2\mathcal{A}^*(\mathcal{A}u - b)$$

$$\mathcal{A}^*c = \psi(t, l; c);$$

$$\begin{cases} \psi_t = -\psi_{xx}, \quad \psi_x|_{x=0} = 0, \quad \psi_x|_{x=l} = -\psi|_{x=l} \\ \psi|_{t=T} = c(x) \end{cases}$$

$$\psi|_{t=0} = c(x)$$

// Проверка ф-лы //

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}u, c \rangle &\stackrel{?}{=} \langle u, \mathcal{A}^*c \rangle_{L_2(0, T)} \\ \triangle \langle \mathcal{A}u, c \rangle &= \int_0^l y(T, x) \underbrace{c(x)}_{=\psi(T, x)} dx = \int_0^l \left(\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (y\psi) dt + y\psi|_{t=0} \right) dx \\ &= \int_0^l \int_0^T (y_t \psi + \psi_t y) dx dt = \int_0^T y_x \psi|_{x=l} dt - \int_0^T \int_0^l y_x \psi dx dt - \\ &\quad - \int_0^T \psi_x y|_{x=0} dt + \int_0^T \int_0^l y_x \psi dx dt = \int_0^T -y(t, l) \psi(t, l) dt + \int_0^T u(t) \cdot \\ &\quad \cdot \psi(t, l) dt - \int_0^T (-\psi(t, l) y(t, l)) dt = \int_0^T u(t) \psi(t, l) dt = \langle u, \mathcal{A}^*c \rangle_{L_2(0, T)} \end{aligned}$$

Схема вычисления $J'(u_0)$

1) $u_0(t) \rightarrow \text{КЗ } g/y \rightarrow y(t, x; u_0(t))$

2) $\mathcal{A}u_0(t) = y(T, x) \rightarrow \mathcal{A}u_0(t) - b(x) = c(x)$

3) Решаем КЗ g/ψ с ранее найд. $c(x) \rightarrow \psi(t, x)$

4) $\mathcal{A}^*c = \psi(t, l) \rightarrow J'(u_0) = 2\psi(t, l; \mathcal{A}u_0 - b(x))$

// Решаем 2 КЗ // Задача g/ψ наз-ся сопр. //

*) Необход. усл. loc min

II.2. $\mathcal{U}$ - выпукл. мн-во из цельб. пр-ва H . $\exists u_* \in \mathcal{U}$ - т. loc min $\mathcal{Y}(u)$ на $\mathcal{U}$, $\exists \mathcal{Y}'(u_*) \Rightarrow \underbrace{\langle \mathcal{Y}'(u_*), u - u_* \rangle}_{\text{вариационное нер-во, т.к. } u \in \mathcal{U}} \geq 0, \forall u \in \mathcal{U}$

▲ Т.к. u_* - т. loc min $\Rightarrow \mathcal{Y}(u_*) \leq \mathcal{Y}(u) \forall u \in O_{\alpha_0}(u_*) \cap \mathcal{U}$, где $O_{\alpha_0}(u_*) = \{u \in H: \|u - u_*\| < \alpha_0\}$

$\forall u \in \mathcal{U}$, if $u \neq u_* \Rightarrow$ нер-во выполнено

If $u \neq u_*: u_\varepsilon = \varepsilon u + (1-\varepsilon)u_* \in O_{\alpha_0}(u_*) \cap \mathcal{U}$

П.к. $\mathcal{U}$ - вып. $\Rightarrow \forall \varepsilon \in [0, 1] u_\varepsilon \in \mathcal{U}$.

$u_\varepsilon \in O_{\alpha_0}(u_*)$: $\|u_\varepsilon - u_*\| = \|\varepsilon(u - u_*)\| = \varepsilon \|u - u_*\| < \alpha_0$, $\varepsilon < \frac{\alpha_0}{\|u - u_*\|}$

If $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \min\{1, \frac{\alpha_0}{\|u - u_*\|}\} \Rightarrow 0 \leq \mathcal{Y}(u_\varepsilon) - \mathcal{Y}(u_*)$
 $\stackrel{\text{гип}}{=} \langle \mathcal{Y}'(u_*), \varepsilon(u - u_*) \rangle + \bar{O}(\varepsilon \|u - u_*\|), \forall u \in \mathcal{U} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \langle \mathcal{Y}'(u_*), u - u_* \rangle + \frac{\bar{O}(\varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0 \xrightarrow{\{\varepsilon \rightarrow 0\}} \langle \mathcal{Y}'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0, \forall u \in \mathcal{U}$

$\mathcal{Y}'(u_*) = 0$

Пример $\mathcal{Y}(u) = u, u \in [1, 2] \subset \mathbb{R}^1$

$\mathcal{Y}_* = 1, u_* = 1$

$\mathcal{Y}'(u_*) = 1 \neq 0$

$\langle \mathcal{Y}'(u_*), u - u_* \rangle = 1 \cdot (u - 1) \geq 0, \forall u \in [1, 2]$

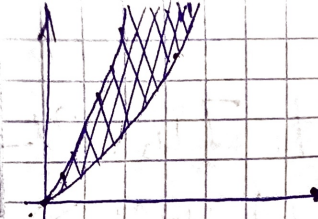
II.3. If $u_* \in \text{int } \mathcal{U}$, то $\forall H \Leftrightarrow \mathcal{Y}'(u_*) = 0$

▲ $u_* \in \text{int } \mathcal{U} \Rightarrow \forall h \in H \exists \delta_0 > 0: u = u_* + \delta h \in \mathcal{U} \forall |\delta| < \delta_0$
 $\Rightarrow \langle \mathcal{Y}'(u_*), \delta h \rangle \geq 0 \forall |\delta| < \delta_0$

If $\delta > 0 \Rightarrow \langle \mathcal{Y}'(u_*), h \rangle \geq 0$

$\delta < 0 \Rightarrow \langle \mathcal{Y}'(u_*), h \rangle \leq 0, \forall h \in H \Rightarrow \mathcal{Y}'(u_*) = 0$

Пример $\mathcal{Y}(u) = 2x^2 - y \rightarrow \inf, u = (x, y) \in \mathcal{U}, u \in \{u \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 2x^2\}$



$y_* = 0, U_* = \{0 \leq x \leq 1, y = 2x^2\}$ // Упр $2x^2 - y = c$, диним уровню //
— не вып.

1) $u_* = (0, 0), Y'(u) = (4x, -1), Y'(u_*) = (0, -1)$

ВН: $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \rangle = -y \leq 0, \forall y \in U \Rightarrow$ ВН г/м. $(0, 0)$ не вып-ся

2) $u_* = (1, 2), Y'(u_*) = (4, -1)$

$\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \rangle = 4x-4-y+2 = 4x-y-2 < 0 \ (x=0=y) \Rightarrow$ ВН не вып-ся

3) $u_* = (x_*, y_*), Y'(u_*) = (4x_*, -1)$

$\langle \begin{pmatrix} 4x_* \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_* \\ y-y_* \end{pmatrix} \rangle = 4xx_* - 4x_*^2 - y + y_* = 4xx_* - 4x_*^2 - y + y_* \leq 0 \ (x=0=y) \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ ВН не вып-ся.

Упр ВН в квадратич. функции, производ-й (?)

8) Как использовать ВЛ?

Пример $Y(u) \rightarrow \inf, u \in E_+^n = \{u = (u^1, u^2, \dots, u^n) : u^i \geq 0, i=1, n\}$

$Y(u) \in C(U)$

$\langle Y'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0, \forall u \in U^* \Leftrightarrow u_*^i \cdot \frac{\partial Y(u)}{\partial u^i} \Big|_{u=u_*} \stackrel{i=1, n}{\geq 0}$ при гон.

усл. if $u_*^i = 0 \Rightarrow \frac{\partial Y(u)}{\partial u^i} \Big|_{u=u_*} \geq 0$

ВЛ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y(u)}{\partial u^i} \Big|_{u_*} (u^i - u_*^i) \geq 0, \forall u \in U$

U , в частности, $u = (u_*^1, \dots, u_*^{i-1}, u^{i*}, u_*^{i+1}, \dots, u_*^n) \Rightarrow \frac{\partial Y(u)}{\partial u^i} \Big|_{u=u_*} \geq 0$

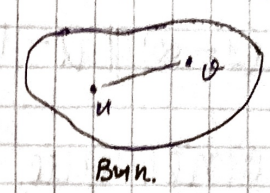
* $(u^i - u_*^i) \geq 0, \forall u^i \geq 0$

1) $u_*^i > 0 \Rightarrow \frac{\partial Y(u)}{\partial u^i} \Big|_{u=u_*} = 0$

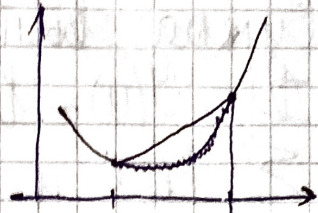
2) $u_*^i = 0 \Rightarrow \frac{\partial Y(u)}{\partial u^i} \geq 0$

III. Элементы выпуклого анализа. 1) Основные определения
 Опр U — из мин. кр-ва явл-ся выпукл., if $[u, v] = \alpha u + (1-\alpha)v \in U, \forall u, v \in U, \forall \alpha \in [0, 1]$

Опр $f(u)$ — вып. ф-ция на вып. U , if $f(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha f(u) + (1-\alpha)f(v), \forall u, v \in U, \forall \alpha \in [0, 1]$

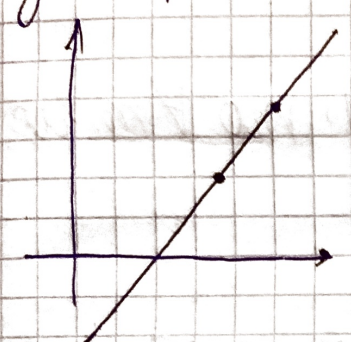


Опр $f(u)$ — строго вып. на U — вып., if при $\alpha \in (0, 1) f(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha f(u) + (1-\alpha)f(v)$

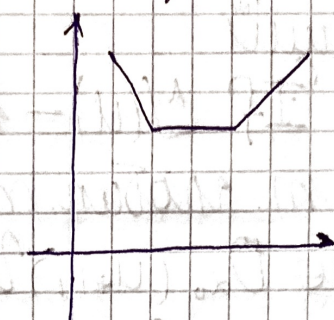


Опр $f(u)$ — строго вып. на U — вып., if при $\alpha \in (0, 1) f(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha f(u) + (1-\alpha)f(v)$ знак рав-ва возможен только при $u=v$

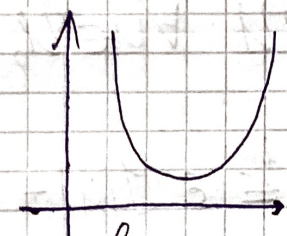
// Когда лежит выше, чем сама ф-ция $\Rightarrow$ отсюда и знак $<$



Вып., но не стр. вып.



Вып., но не стр. вып.



Стр. вып.

If ф-ция стр. вып $\Rightarrow$ вып, но не наоборот!

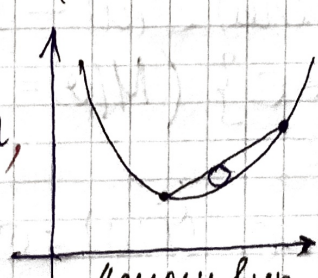
Опр $f(u)$ — сил. вып. на U — вып. и H -шлб, if $\exists \alpha > 0$

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha f(u) + (1-\alpha)f(v) - \frac{1}{2} \alpha(1-\alpha) \|u-v\|^2$$

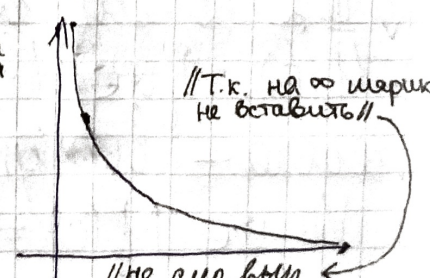
$\forall u, v \in U, \forall \alpha \in [0, 1]$

Сил. вып $\Rightarrow$ Стр. вып $\Rightarrow$ Вып,

но не наоборот!



Сил. вып. т.к. можем вставить шарик $\neq \emptyset$



не сил. вып. $\leftarrow$ строго вып.

// Наб. $\alpha = \text{const}$ сил. вып-ти //

Пример $f(u) = \|u\|^2$ с/в.

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) = \|\alpha u + (1-\alpha)v\|^2 = \alpha^2 \|u\|^2 + 2\alpha(1-\alpha)\langle u, v \rangle + (1-\alpha)^2 \|v\|^2$$

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) - \alpha f(u) - (1-\alpha)f(v) = \alpha^2 \|u\|^2 + 2\alpha(1-\alpha)\langle u, v \rangle - \alpha^2 \|u\|^2 - (1-\alpha)^2 \|v\|^2 = 2\alpha(1-\alpha)\langle u, v \rangle - (1-\alpha)^2 \|v\|^2$$

$$\begin{aligned}
 & + (1-\alpha)^2 \|v\|^2 - \alpha \|u\|^2 - (1-\alpha) \|v\|^2 = \alpha (1-\alpha) \|u\|^2 + 2\alpha(1-\alpha) \langle u, v \rangle \\
 & + (1-\alpha)(1-\alpha-1) \|v\|^2 = \alpha(\alpha-1) [\|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2] = \\
 & = -\alpha(1-\alpha) \|u-v\|^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \Rightarrow \text{ф-ция} - \text{с/в.}
 \end{aligned}$$

Простейшие св-ва:

- (1) Сумма вып. ф-ций — вып. ф-ция
- (2) If $f(u)$ — вып., то $\alpha f(u)$ — вып., $\alpha > 0$
- (3) $\sum$ вып. и сильно вып. ф-ций — сил. вып. ф-ция
- (4) If $f(u)$ — вып., то $(-f(u))$ — вып.

2) Св-ва вып. ф-ций

∇ III.1 (о loc min) If $f(u)$ — вып. на вып. U , то $\forall m$. loc min будет явл-ся т. глобал. min

▲ $f(u_*) \leq f(u) \quad \forall u \in O_{\alpha_0}(u_*) \cap U$

$u_\varepsilon = u_* + \varepsilon(u - u_*) \in O_{\alpha_0}(u_*) \cap U : \forall u \in U, 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0 = \min\{1, \frac{\alpha_0}{\|u - u_*\|}\}$

$$\begin{aligned}
 \frac{f(u_*)}{\|u - u_*\|} & \leq f(u_\varepsilon) = f(\varepsilon u + (1-\varepsilon)u_*) \stackrel{\text{вып.}}{\leq} \varepsilon f(u) + (1-\varepsilon)f(u_*) = \\
 & = f(u_*) + \varepsilon(f(u) - f(u_*)) \Leftrightarrow 0 \leq \varepsilon(f(u) - f(u_*)) \Rightarrow \\
 & f(u) \geq f(u_*) \quad \forall u \in U.
 \end{aligned}$$

∇ III.2 (о мн-ве Лебега) $f(u)$ — вып. на U — вып., тогда $M(c) = \{u \in U : f(u) \leq c\}$ ($M(v) = \{u \in U : f(u) \leq f(v)\}$) — мн-во Лебега — выпукло.

▲ $\forall u, v \in M(c) \Rightarrow f(u) \leq c, f(v) \leq c$

$$\begin{aligned}
 & f(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha f(u) + (1-\alpha)f(v) \leq \alpha c + (1-\alpha)c = c, \\
 & \forall \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \alpha u + (1-\alpha)v \in M(c) \Rightarrow \text{т.д.}
 \end{aligned}$$

Сел. 1 If $f(u)$ — вып. на вып. U и $U_* \neq \emptyset \Rightarrow U_*$ — вып.

▲ $U_* = \{u \in U : f(u) = f_*\} = \{u \in U : f(u) \leq f_*\}$ — мн-во

Лебега - вып. ■

Сл. 2 If $\gamma(u)$ - стр. вып. на U - вып. $\Rightarrow U_* = \emptyset$ или $U_* = \{u_*\}$

▲ От противного: $\exists u_*, v_* \in U_* \Rightarrow \alpha u_* + (1-\alpha)v_* \in U_* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\gamma(\alpha u_* + (1-\alpha)v_*)} = \gamma_* = \alpha \gamma_* + (1-\alpha) \gamma_* = \underline{\alpha \gamma(u_*) + (1-\alpha) \gamma(v_*)},$$

$\gamma(v_*)$, $\forall \alpha \in [0, 1] \Rightarrow$ в силу стр. вып. $u_* = v_*$ ■